

# Curso de electromagnetismo -Capítulo 4-Magnetostática

Rubens Amaral

*Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense*

*Av. Litorânea, S/N, Boa Viagem, Niterói, CEP.24210-340, Rio de Janeiro - Brasil*

3 de fevereiro de 2016

# Capítulo 4

## Magnetostática

Relembrando as equações de Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho & , & & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & e & & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.0.1)$$

vemos que em situações estáticas a fonte do campo magnético é a densidade de corrente,  $\vec{J}(\vec{r})$ .

O significado de  $\vec{J}$  é fluxo de carga por unidade de área. Assim a corrente que atravessa uma superfície S é dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}.$$

Daí se tira que se uma distribuição contínua de cargas apresenta densidade  $\rho(\vec{r})$  e um campo de velocidades, a velocidade média em cada ponto do espaço,  $\vec{v}(\vec{r})$ , a densidade de correntes será

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r}). \quad (4.0.2)$$

Para uma carga pontual no ponto  $\vec{r}_0$  com velocidade  $\vec{V}_0$  a corrente será então

$$\vec{J} = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\vec{V}_0,$$

e para uma coleção de cargas

$$\vec{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_{\alpha}) \vec{V}_{\alpha}.$$

Veja que trocando a coleção discreta por um contínuo de cargas se volta à equação 4.0.2.

Como se descreve a densidade decorrente associada a um fio condutor de correntes? Troque a distribuição discreta por uma distribuição linear de cargas e obtenha

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int dl \lambda(l) \delta(\vec{r} - \vec{r}'(l)) \vec{V}(l).$$

Às vezes se precisa de descrever o fluxo de carga ao longo de uma superfície,  $\vec{K} = \sigma\vec{V}$ , e não ao longo de um fio. Supomos aqui que uma densidade superficial de cargas  $\sigma$  flui ao longo da superfície com velocidades  $\vec{V}$ . O dicionário para trocar densidade volumétrica de corrente por densidade superficial de corrente é

$$\int dV\vec{J} \leftrightarrow \int da\vec{K} \leftrightarrow \int da\sigma\vec{V},$$

O significado físico das densidades de corrente fica explicitado ao se realizar a integral de superfície ou de linha das correntes volumétrica ou superficial. A quantidade de carga por unidade de tempo que atravessa uma superfície S devido a um fluxo volumétrico de correntes é dada por

$$\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} da,$$

onde  $\vec{n}$  é o vetor unitário ortogonal à superfície S. Do mesmo modo, uma corrente superficial definida numa superfície S leva ao conceito de fluxo de carga através de um caminho C definido na superfície S

$$\frac{dQ}{dt} = \int_C \vec{K} \cdot \vec{n} dl,$$

onde  $\vec{n}$  é um vetor unitário contido na superfície S e **ortogonal** à curva C.

Falta um conceito importante: a noção de continuidade de cargas. É uma lei da natureza, não falseada até agora por nenhum experimento, que a carga se conserva. No que diz respeito à densidade de corrente a conservação se obtém da expressão alternativa da taxa de variação da carga em um volume, em termos da corrente que sai pela superfície da borda do volume, e em termos da taxa de variação no tempo da densidade de cargas, ufa!:

$$\int_V d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{dQ_V}{dt} = - \int_{\delta V} \vec{J} \cdot d\vec{a} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d^3r,$$

onde usamos o teorema da divergência. Obtemos então que a lei de conservação se expressa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

*Desafio: Tome para uma partícula se movendo de acordo com  $\vec{r}_0(t)$ ,  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$  e  $\vec{J}(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))\frac{d\vec{r}_0(t)}{dt}$  e verifique a validade da equação acima.*

Esta equação é fundamental para a consistência das equações de Maxwell. Você é convidado, talvez incentivado, induzido, intimado, a verificar que ela pode ser derivada das equações de Maxwell. No nosso caso, estaremos interessados em situações estáticas. Elas se caracterizam por  $J$  depender, possivelmente do espaço, mas não do tempo. Nesses casos se obtém

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.$$

## 4.1 Equações básicas da magnetostática

Vamos lidar com campos que não dependem do tempo e com correntes que também não dependem. Nesse caso as equações do campo elétrico e do campo magnético se desacoplam. A única relação

entre elas permanece na inter-relação entre as fontes, a definição da corrente em termos de cargas (Desconfio que mesmo isso tem de ser relaxado, no caso de spin). Queremos resolver as equações

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (4.1.3)$$

A última delas é a lei de Ampère, com  $\mu_0$  a permeabilidade do vácuo. Note que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  é necessária.

Bem, como no caso da eletrostática, o teorema de Helmholtz resolve a questão:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (4.1.4)$$

com

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (4.1.5)$$

O potencial vetor,  $\vec{A}(\vec{r})$ , exerce na magnetostática papel análogo ao de  $\phi(\vec{r})$  na eletrostática. Parece que alegar analogia entre  $\vec{A}$  e  $\phi$  é otimismo exacerbado. Afinal por que precisamos de 3 componentes do potencial vetorial e somente uma grandeza no caso do potencial escalar para definir, em ambos os casos, campos, magnético ou elétrico, que tem 3 componentes cada? As fontes para os campos são vetoriais e escalares, respectivamente. Mas, a analogia entre o potencial vetor e o potencial escalar se manifesta na liberdade de gauge. Redefinir o potencial escalar pelo acréscimo de uma constante,  $\phi' = \phi + c$ , nada muda da física. O campo elétrico é o mesmo. Utilizamos, inclusive, essa liberdade para calcular o potencial produzido por uma linha de cargas infinita, escolhendo o zero do potencial em uma distância finita. Da mesma maneira, temos a liberdade de gauge: qualquer que seja o campo  $\psi(\vec{r})$ ,

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}),$$

dá origem ao mesmo campo magnético que  $\vec{A}$ . De fato

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = \vec{B}.$$

**Importante:**  $\vec{A}'$  e  $\vec{A}$  são completamente equivalentes. Não há distinção física entre eles. Da mesma maneira que  $\phi$  e  $\phi'$ .

*Obs: O conjunto de transformações de gauge dos potenciais pode ser ampliado. Mesmo que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  não dependam do tempo, a redefinição conjunta*

$$\phi' = \phi - \partial_t \psi(\vec{r}, t) \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi(\vec{r}, t),$$

*não muda as definições do campo elétrico e magnético, se eles são definidos por*

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Note que a expressão do potencial em termos da integral de  $\rho \frac{1}{\Delta r}$  define o potencial para uma condição de gauge específica: no caso de cargas localizadas em uma região "finita", o campo vai a zero no infinito. Da mesma maneira a expressão na eq. 4.1.5 define o potencial vetor em uma condição de gauge específica. Para entender melhor, vamos calcular a divergência de dois potenciais vetores relacionados por uma transformação de gauge.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi.$$

Conclusão: o valor da divergência de um potencial vetor pode ser mudado conforme o gosto do freguês. Basta ajustar o laplaciano de  $\psi$ . Qual é a condição sobre a divergência de  $\vec{A}$  que está embutida na equação 4.1.5?

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \int_V d^3r \vec{J}(\vec{r}') \cdot (\vec{\nabla} \frac{1}{\Delta r}) = \int_V d^3r \vec{J}(\vec{r}') \cdot (-\vec{\nabla}' \frac{1}{\Delta r}) \\ &= - \int_V d^3r \vec{\nabla}' \cdot (\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{\Delta r}) + \int_V d^3r \frac{1}{\Delta r} \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = \int_{\delta V} \vec{d}a \cdot (\vec{J}(\vec{r}') \frac{1}{\Delta r}). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Onde usamos o teorema da divergência e a conservação da corrente. Em geral, o termo de superfície se anula, se as fontes são localizadas em uma região finita. Resulta

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0.$$

A relação entre  $\vec{B}$  e  $\vec{A}$  não é tão imediata como a relação entre  $\vec{E}$  e  $\phi$ . Como  $\vec{E}$  vem do gradiente de  $\phi$  a variação de  $\phi$  em um pequeno intervalo te dá informação sobre a componente de  $\vec{E}$  na direção do intervalo. Quanto a  $\vec{B}$ , aplicando o teorema de Stokes à equação 4.1.4, vemos que a integral de caminho de  $\vec{A}$  em um circuito plano fechado, circulação, dá informação sobre a componente de  $\vec{B}$  ortogonal à superfície:

$$\vec{B} \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\delta S} \vec{A} \cdot d\vec{l},$$

onde usamos  $S$  para simbolizar, por licença poética, tanto a superfície, com vetor normal  $\hat{n}$ , como a medida da sua área.

### 4.1.1 Exemplos

O cálculo de  $\vec{A}$  a partir das correntes é em geral mais laborioso que o cálculo de  $\phi$  a partir das cargas. Mas em alguns casos vale a pena ressaltar as semelhanças. Vamos ver alguns casos?

**Exemplo 1: fio reto infinito com corrente** Considere um fio ao longo do eixo  $z$  portanto uma corrente  $I$ .

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \vec{A}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} dz' I \frac{\hat{z}}{\Delta r} = I \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\hat{z}}{\sqrt{s^2 + (z - z')^2}}.$$

Epa, acho que já fizemos essa integral antes! Vamos complicar um pouco: que tal fazer a integral entre  $L_1$  e  $L_2$ ? Pra que ganhar pouco se vamos realizar a integral? Chamando o potencial deste caso de  $\vec{A}_L$ , vamos calculá-lo no plano  $z = 0$ , já que a dependência em  $z$  pode ser resgatada dos valores dos  $L_s$  ( imagine uma translação em  $z'$ ):

$$\vec{A}_L = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{L_1}^{L_2} dz' \frac{1}{\sqrt{s^2 + z'^2}} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s}\right) \right),$$

onde  $s^2 = x^2 + y^2$ , utilizamos a mudança de variáveis  $z = s \sinh(\theta)$ , e a função arco-seno-hiperbólico é  $\sinh^{-1}$ . Bem, comparando com o problema primo deste na eletrostática, o fio carregado, lembramos que lá fizemos uma transformação de gauge, redefinindo o zero do potencial. Aqui também fazemos isso,  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi$ , com  $\psi(\vec{r}) = \psi(z) = -\frac{I\mu_0}{4\pi}z \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s_0}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s_0}\right) \right)$  e  $s_0$  uma constante.

$$\vec{A}_L(\vec{r}) = \frac{I\mu_0}{4\pi} \hat{z} \left( \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s}\right) - \sinh^{-1}\left(\frac{L_2}{s_0}\right) + \sinh^{-1}\left(\frac{L_1}{s_0}\right) \right). \quad (4.1.7)$$

Calculamos o potencial vetor associado a uma "segmento de fio" reto finito\*. Tomando o limite  $L_1 = L_2 = \infty$ , o que somente pode ser feito após a transformação de gauge (verifique), resulta que o potencial vetor de um fio infinito é

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \hat{z} \ln\left(\frac{s}{s_0}\right). \quad (4.1.8)$$

Daí, o campo magnético, usando a expressão do rotacional em coordenadas cilíndricas, será

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}. \quad (4.1.9)$$

O potencial vetor é paralelo ao fio e o campo magnético tem suas linhas de campo fazendo voltas circulares ao redor do fio. Este é o comportamento padrão dos campos  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , que deve fazer parte do seu arsenal intuitivo.

### Exemplo 2 - Campo de um plano

Esse exemplo é teoricamente importante. Um plano de cargas uniformemente carregado, densidade  $\sigma$  no plano  $xy$ , é posto em movimento com velocidade constante,  $v$ , na direção  $\hat{x}$ . Cria-se uma densidade superficial de correntes,  $\vec{K} = K\hat{x} = \sigma\hat{v}$ . Só temos de calcular a componente  $A_x$ , e usamos  $s^2 = x^2 + y^2$ :

$$A_x(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty, -\infty}^{\infty, \infty} dx dy \frac{K}{\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0}{2} \int_0^\infty s ds \frac{K}{\sqrt{z^2 + s^2}} =$$

"Peraí"! Faz uma transformação de gauge antes de calcular o limite a infinito. Explicando: tomamos a integral de  $s = 0$  até  $s = S$ , e depois fazemos  $S \rightarrow \infty$ . Antes, com  $S$  fixo, escolhemos  $\psi(x) = -x \frac{\mu_0 K}{2} \int_0^R \left( \frac{s}{\sqrt{z_0^2 + s^2}} \right) ds$  e acrescentamos  $\vec{\nabla}\psi$  ao  $\vec{A}$ .

$$\begin{aligned} A_x^S(z) &= \frac{\mu_0}{2} \int_0^S s ds \left( \frac{K}{\sqrt{z^2 + s^2}} - \frac{K}{\sqrt{z_0^2 + s^2}} \right) = \frac{\mu_0 K}{2} \left( \sqrt{s^2 + z^2} - \sqrt{s^2 + z_0^2} \right) \Big|_0^S \\ &= \frac{\mu_0 K}{2} \left( S \left( \sqrt{1 + \left(\frac{z}{S}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{S}\right)^2} \right) - |z| + |z_0| \right) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Após essa transformação de gauge, tomamos o limite de  $S$  indo a infinito:

---

\*Há um detalhe importante. A expressão 4.1.7 vale para um ponto no plano  $xy$ . A generalização para ponto qualquer do espaço se faz com  $L_2 \rightarrow L_2 - z$  e  $-L_1 \rightarrow -L_1 - z$ . A potencial vetor tem divergência não nula, o que se deve a um fio finito não respeitar a conservação da corrente

$$A_x(z) = \frac{\mu_0 K}{2} (|z_0| - |z|). \quad (4.1.11)$$

Veja que a transformação de gauge permitiu realizar o limite quando  $s \rightarrow \infty$ . É mais econômico escolher  $z_0 = 0$ . Note que esse cálculo é estritamente análogo ao cálculo do potencial criado por um plano infinito uniformemente carregado ( $A_x \rightarrow \phi$ ;  $\mu_0 \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0}$ ;  $K \rightarrow \sigma$ .)

O rotacional de  $\vec{A}$  nos dá

$$\vec{B} = -\hat{y} \frac{\mu_0 K |z|}{2}.$$

O campo resultante não depende do módulo da distância ao plano. O que me chama mais a atenção nesse resultado, é o módulo aparecer! Significa algo muito importante: A componente  $y$  do campo magnético sofre uma descontinuidade ao atravessar o plano  $z = 0$  no qual há uma corrente na direção  $\hat{x}$ ! Em bom português (será?):

$$\Delta \vec{B} \cdot (\hat{K} \times \hat{n}) = \mu_0 K$$

ou

$$\hat{n} \times \Delta \vec{B} = \mu_0 \vec{K}.$$

Aqui  $\hat{n}$  é o vetor normal à superfície onde flui a corrente superficial  $\vec{K}$ . Essa descontinuidade é um fato da vida, do mesmo modo que a descontinuidade da componente normal de  $\vec{E}$  ao atravessar um plano carregado. Ela se deve à propriedade  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} = \mu_0 K \delta(z)$ , analogamente a  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \delta(z)$ .

**Exemplo 3: espira circular** Fig. 4.1.

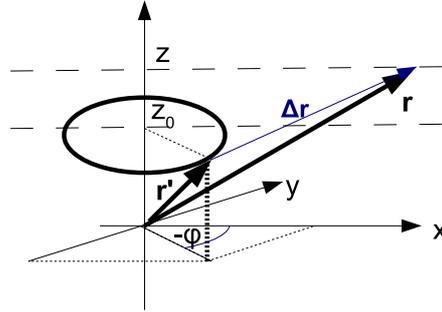


Figura 4.1: Espira de corrente.

Nesse caso é um tanto chato de calcular o  $\vec{A}$ . Um pouco mais de atenção é necessária. Imagine um círculo de raio  $R$ , no plano  $z = z_0$ , centrado no eixo  $z$  e portando cargas, densidade linear  $\lambda$ . Ele é posto a girar, velocidade angular  $w$ , em torno do seu eixo. Resulta um círculo de corrente,  $\vec{I} = \lambda w R \hat{\phi}$ . Podemos calcular o potencial vetor no plano  $xz$ , sem perda de generalidade. A componente  $A_z$  é identicamente nula e a  $A_x$  também se anula por simetria já que pontos do círculo em posições opostas ao plano  $xz$  ( $y \leftrightarrow -y$ ) contribuem com sinais trocados. A única componente relevante é  $A_y$ . Chamando o ângulo azimutal de  $\varphi$  temos  $I_y = I \cos \varphi$ ,  $\Delta \vec{r} = (z - z_0) \hat{z} + (x - R \cos \varphi) \hat{x} + R \sin \varphi \hat{y}$ ,

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cos \varphi R d\varphi}{\Delta r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi \cos \varphi R}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2 - 2xR \cos \varphi}} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \xi \quad (4.1.12)$$

com  $\xi = \int_0^\pi \frac{R \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta \cos \varphi}}$ ,  $\alpha = \sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2}$  e  $\beta = 2xR$ . A integral pode ser expressa em termos de funções elípticas. Não existe uma expressão como funções algébricas. O importante é notar que  $\vec{A} = f(x, z)\hat{y}$ , que generalizando para qualquer ponto, e não para pontos exclusivamente no plano  $xz$ , resulta  $\vec{A} = f(s, z)\hat{\varphi}$ . Daí se obtém, escolhendo  $z_0 = 0$ ,

$$\vec{B} = -\frac{\partial f}{\partial z}\hat{r} + \frac{1}{s}\frac{\partial(sf)}{\partial s}\hat{z}.$$

O limite quando  $x$  é muito pequeno pode ser obtido. Expandindo o integrando nesse limite, em potências de  $\frac{s}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2}}$ , resulta

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4} \frac{sR^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

O rotacional fornece, para pontos no eixo  $z$ ,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}.$$

Como as correções de ordem mais alta em  $\frac{s}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2}}$  se anulam para pontos ao longo do eixo  $z$ . Com algum trabalho, obtivemos a expressão, exata, do campo magnético ao longo do eixo de simetria do círculo.

**Exemplo: casca esférica uniformemente carregada e girando** Esse caso dá um tanto de trabalho mas o resultado final é muito importante. Vamos começar descrevendo num sistema de coordenadas em que  $\tilde{z}$  aponta na direção do eixo em torno do qual a esfera gira, e no qual o ponto de observação é escolhido estar no plano  $\tilde{y} = 0$ .

O ponto de partida será fatiar a esfera ortogonalmente ao eixo de rotação e tomar espiras infinitesimais, com raios  $R \sin \tilde{\theta}$  e de espessura  $R d\tilde{\theta}$ . Deste modo  $I_j \rightarrow dI_j = RK_j d\tilde{\theta}$ , e  $I_j R d\tilde{\varphi} \rightarrow R^2 K_j \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} d\tilde{\varphi} = R^2 K_j d\tilde{\Omega}$ . A expressão do potencial da espira se transforma em

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I_i R d\varphi}{\Delta r} \rightarrow A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{dI_i R d\varphi}{\Delta r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} K_i \frac{d\tilde{\Omega} R^2}{\sqrt{\Delta z^2 + R^2 + x^2 - 2xR \cos \tilde{\varphi}}} \quad (4.1.13)$$

Agora em vez de continuar com esse sistema de coordenadas, escolhemos um sistema em que o eixo  $z'$  aponta na direção do ponto de observação  $\vec{r} = z\hat{z}'$ . Nesse sistema temos, chamando de  $\theta$  o ângulo entre o eixo  $z$  e a velocidade angular, lembrando que  $\vec{K} = \sigma \vec{\omega} \times \vec{r}'$ ,

$$\vec{\omega} = (\omega \sin \theta, 0, \omega \cos \theta); \vec{r}' = (R \sin \theta' \cos \varphi', R \sin \theta' \sin \varphi', R \cos \theta')$$

$$\vec{K} = (\sigma \omega R)(-\cos \theta \sin \theta' \sin \varphi', -\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta \sin \theta' \sin \varphi')$$

A vantagem é que a raiz no denominador do integrando se torna simplesmente  $\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta'}$ . A integral em  $d\varphi'$  aniquila quase todas as contribuições, lineares em  $\sin \varphi'$  e em  $\cos \varphi'$ . Somente é diferente de zero a integral, lembrando que  $d\tilde{\Omega} = d\Omega$ ,

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{-R^3 \mu_0 \sigma \omega \sin \theta}{4\pi} \int d\Omega' \frac{\cos \theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta'}} = \frac{-\mu_0 R^3 \sigma \omega}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu \mu}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\mu}} \\ &= \frac{\mu_0 R \sigma \omega}{6r^2} [(R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - rr)(R + r)] \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & \text{se } r < R, \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} \vec{\omega} \times \vec{r}, & \text{se } r > R. \end{cases} \quad (4.1.15)$$

O campo magnético obtido calculando o rotacional, é uniforme para  $r < R$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \omega \hat{z}, & \text{se } r < R, \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (3(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{\omega}), & \text{se } r > R. \end{cases} \quad (4.1.16)$$

Esse resultado é muito parecido com o campo elétrico de uma casca esférica carregada proporcionalmente a  $\cos \theta$ , não é mesmo? Compare os dois resultados.

*Exercício: calcule a componente  $B_\theta$  e verifique qual é a sua descontinuidade ao atravessar a superfície esférica*

*Exercício: Encontre o campo em pontos exteriores produzido por uma esfera sólida uniformemente carregada girante.*

## 4.2 Lei de Ampère

Só para lembrar: iniciamos com a lei de Ampère, mas se a houvéssemos esquecido, poderíamos resgatá-la do potencial vetor como segue.

Primeiro um resultado fantástico: cada componente de  $\vec{A}$  satisfaz à Lei eq. Poisson com a componente da corrente substituindo a densidade de cargas. Demonstração? Tome a componente  $A_i$  e expresse-a

$$A_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{J_i}{\Delta r}. \quad (4.2.17)$$

Essa é a mesma expressão do potencial escalar,  $A_i \leftrightarrow \phi$ , em termos de  $\rho$ ,  $J_i \leftrightarrow \rho$ , substituindo  $\epsilon_0 \leftrightarrow \frac{1}{\mu_0}$ . Resulta

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Essa pode ser chamada de Lei de Ampere diferencial para o potencial vetor.

Tomando agora o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

Ou, seja, a lei de Ampere. Essa lei pode ser posta em forma integral, assim como a lei de Gauss pode ser diferencial ou integral:

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{d}a = \int_S \vec{d}a \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \int_{\delta S} \vec{B} \cdot \vec{d}l.$$

Observe a analogia:

Eletrostática: Lei de Coulomb  $\leftrightarrow$  Lei de Gauss ( Formas diferencial ou integral).

Magnetostática: Lei de Biot-Savart  $\leftrightarrow$  Lei de Ampere ( Formas diferencial ou integral).

Como assim, Lei de Biot-Savart? De fato a equação 4.2.17 nada mais é que a lei de Biot-Savart escrita em termos do potencial vetor. A lei de Biot-Savart decorre imediatamente dela:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\Delta r} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{\nabla} \left( \frac{1}{\Delta r} \right) \times \vec{J}(\vec{r}') \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2}.
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Essa última expressão para  $B$  expressa a forma usual da lei de Biot-Savart, que pode assumir diversas outras aparências:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int da' \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dl' \frac{\vec{I}(\vec{r}') \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{\Delta r}}{\Delta r^2},
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

onde foi possível fatorar  $I$  na última expressão devido à conservação da corrente. A lei de Biot-Savart representa para a magnetostática o mesmo que a lei de Coulomb representa para a Eletrostáticas.

A lei de Biot-Savart também nos mostra um importante aspecto do campo magnético: ele não é um vetor, mas um pseudo-vetor. Um vetor inverte os valores das suas componentes quando invertemos todos os pontos em relação à origem,  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ . Ora, tanto  $\Delta\vec{r}$  como  $\vec{J}$  são vetores. Como eles invertem os sentidos, e o  $\vec{B}$  é composto do produto(vetorial) dos dois,  $\vec{B}$  não muda.

É fácil aplicar diretamente a equação de Biot-Savart em alguns casos.

Exemplo: Fio infinito ao longo do eixo  $z$  com o campo calculado inicialmente no ponto  $(x, y=0, z=0)$ .  $d\vec{l}' = dl' \hat{z}$ ,  $\Delta\vec{r} = -z' \hat{z} + x \hat{x}$ ,  $d\vec{l}' \times \Delta\vec{r} = -x \hat{y}$ , e

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dz'}{(x^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A transformação  $z' = x \sinh \theta$  resolve a parada trivialmente,  $B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ , ou, em todo o espaço,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{e}_\varphi.$$

Espera aí! Novamente fizemos a integral? Melhor fazer para  $z'$  iniciando em  $L_1$  e terminando em  $L_2$ :

$$\vec{B}(x, y, 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} \left( \frac{-L_1}{\sqrt{L_1^2 + s^2}} + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + s^2}} \right) \hat{e}_\varphi.$$

O resultado acima corresponde ao rotacional do potencial vetor calculado anteriormente para esse problema, 4.1.7.

Observe que o campo magnético para o fio infinito pode ser obtido ainda por um terceiro método. Por simetria  $\vec{B} = \hat{e}_\varphi B(s)$ . Agora usando a lei de Ampere na forma integral resulta, para um circuito de integração circular de raio  $s$ ,

$$\mu_0 I = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} s B(s) = 2\pi s B(s),$$

simples, não? **Por favor** preste a máxima atenção para a forma como a simetria foi utilizada! A simetria é usada primeiro, depois a integral é realizada. A integral não determina a forma simples de  $B$ . A simetria ou faz! A vontade que a integral seja trivial não é argumento para que ela o seja! A simetria nesse caso sugere que  $\vec{B}$  dê voltas em torno do fio, e não que aponte radialmente como no caso de  $\vec{E}$ .

*Exercício:* Utilize a lei de Biot-Savart (para  $\vec{B}$ ) para obter o campo magnético de uma espira circular em pontos no eixo de simetria.

### 4.3 Resumo

O quadro na Fig. 4.2 mostra o conjunto de inter-relações entre os campos.

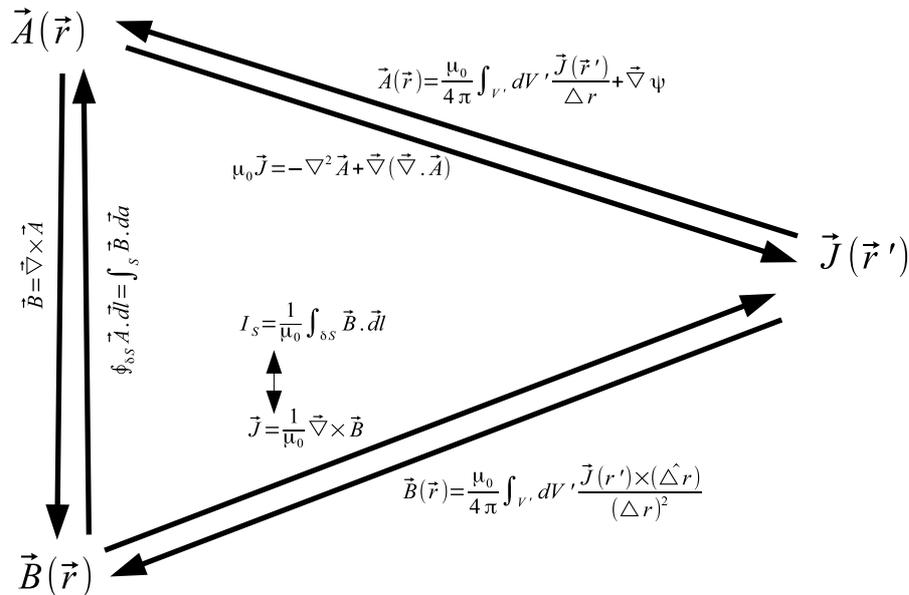


Figura 4.2: Quadro resumo Magnetostática.

Compare com o quadro análogo no caso da eletrostática, Fig. 4.3.

### 4.4 Mais alguns exemplos de aplicação da Lei de Ampere

Observação: Aplicar cuidadosamente as condições de simetria. Notar que o campo magnético é pseudo-vetor e não vetor.

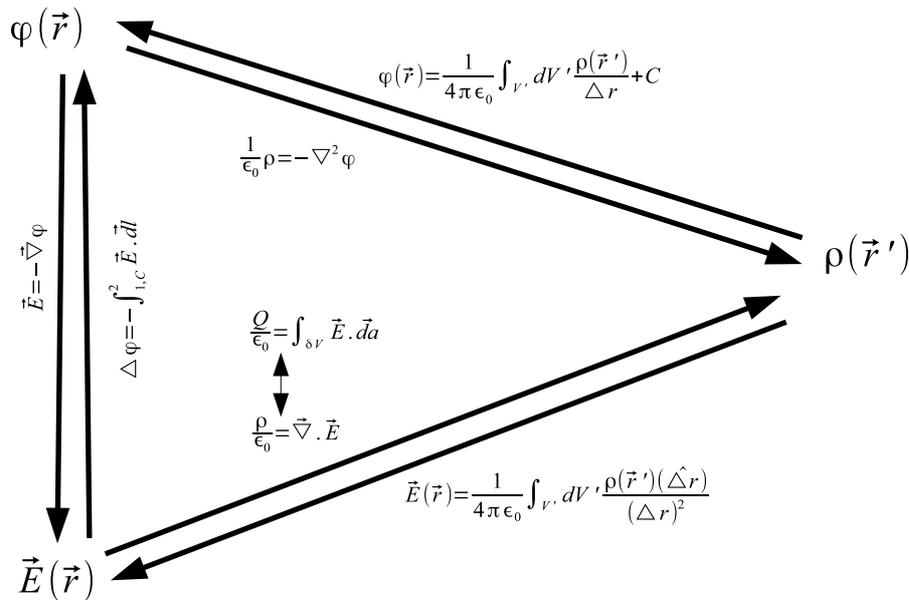


Figura 4.3: Quadro resumo Eletrostática.

**Campo de um plano-** O plano  $y = 0$  porta densidade superficial de corrente na direção  $z$ ,  $\vec{K} = K\hat{z}$ . Por simetria podemos supor  $\vec{B} = B(y)\hat{x}$ . Tomando amperiana sendo circuito retangular com lados compridos de cada lado do plano e os lados curtos atravessando o plano, obtemos  $B(0^+) - B(0^-) = \mu_0 K$ . A solução mais simples é  $\vec{B} = \mu_0 K \hat{x} \frac{y}{|y|}$ .

**Campo de Solenoide infinito-** Uma casca cilíndrica com carga superficial  $\sigma$ , de raio  $R$ , gira com velocidade angular  $w$  em torno do seu eixo,  $\hat{z}$ . A corrente superficial resultante é  $\vec{K} = \sigma R w$ . Por simetria,  $\vec{B} = B(s)\hat{z}$ . Escolhendo amperianas retangulares com lados grandes da direção  $z$  e curtos na direção radial cilíndrica, resulta que  $B(s)$  é constante tanto no interior como no exterior do cilindro. A descontinuidade obtida quando um lado da amperiana está em  $R^+$  e o outro em  $R^-$  nos dá que  $B = \mu_0 K \theta(R - s)$ .

*Tratamento alternativo para o campo gerado por um solenoide: Cálculo diretamente do potencial vetor. Já vimos que uma casca cilíndrica carregada com  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  gera um campo em todo o espaço descrito como  $\phi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \cos \theta \times f(r)$  onde  $f(r) = r$  para  $r < R$  e  $f(r) = \frac{R^2}{r}$  para  $r > R$ . Ora, o potencial vetor é gerado de maneira análoga ao escalar, substituindo  $\sigma$  por  $K_i$  para cada componente  $A_i$ , e  $\epsilon_0$  por  $1/\mu_0$ . Basta notar que  $K_x = -K \sin \theta = -K \cos(\pi/2 - \theta)$  e  $K_y = K \cos \theta$  e se obtém então diretamente a expressão do potencial vetor*

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{K\mu_0 r}{2} (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}), & \text{se } r < R, \\ \frac{K\mu_0 R^2}{2r} (\sin \theta \hat{x} - \cos \theta \hat{y}), & \text{se } r > R. \end{cases} \quad (4.4.20)$$

*Daí se obtém o mesmo campo magnético que obtivemos pela lei de Ampere. O potencial vetor fora do cilindro é dado pelo gradiente do ângulo azimutal,  $\vec{A} = -\frac{K\mu_0 R^2}{2} \nabla \varphi$ . Ou seja, é "localmente" um campo "puro gauge", cujo rotacional é nulo. O adjetivo anterior se deve a que a  $\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$  não se anula se o circuito  $C$  envolver o miolo do solenoide em seu interior, mas se anula se o circuito não envolve o solenoide. Veja o efeito Aharonov-Bohm para uma aplicação interessante.*

### Campo de um cilindro com movimento longitudinal-

Caso parecido com o anterior. Por simetria,  $\vec{B} = B(s)\hat{\phi}$ . Amperianas circulares de raio  $r$  centradas no eixo do cilindro. Resulta  $B(s) = \mu_0 K \frac{s}{R} \theta(s - R)$ . Repare na descontinuidade, de uma componente tangencial, em  $s = R$ . Note que se pode obter pelo mesmo raciocínio acima: a analogia com o caso elétrico permite obter diretamente a expressão de  $A_z$ ,  $A_z = -\mu_0 K \ln(r/R)$ , para  $r > R$ , e nulo para  $r < R$ .

**Tratamento alternativo do potencial de uma casca esférica girando-** A densidade de corrente é dada por  $K_\varphi = \sigma w R \sin \theta$ . Tanto para  $r < R$ , como para  $r > R$  o campo magnético terá divergência e rotacional nulos, já que a fonte está em  $r = R$ . Portanto podemos definir um campo escalar,  $\phi$ , em cada uma das regiões de modo que  $\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi$ . Trate o  $\phi$  em cada região como tratou o campo escalar, com simetria azimutal e separação de variáveis em coordenadas esféricas. Somente mudam as condições de contorno em  $r = R^\pm$ . Dá para ver que somente o primeiro polinômio de Legendre comparece. A condição de contorno nova é a descontinuidade da componente  $B_\theta$ , enquanto a componente normal é contínua. O cálculo de  $B_\theta$  leva a termo proporcional a  $\sin \theta$  que fatora com o mesmo seno presente na densidade de corrente. Fica para o leitor preencher os detalhes.

## 4.5 Força de Lorentz

$$\vec{F} = Q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right).$$

Obs: quando realizamos transformação de Lorentz, levando em conta a relatividade, os campos elétricos e magnéticos são transformados em conjunto<sup>†</sup>. Esse argumento sugere ver a força de Lorentz como um conjunto, e não como forças separadas.

*Exercício: Mostre que a a força de Lorentz pode ser escrita como*

$$F_i = q (E_i + v_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i)).$$

A quantidade  $F_{ij} \equiv \partial_i A_j - \partial_j A_i$  define um forma alternativa(tensorial) de expressar o campo magnético(  $F \leftrightarrow B$ ):

$$F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k \text{ e } B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}.$$

Em forma matricial,  $F$  é expresso como

$$F = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5.21)$$

Há vantagens em usar essa nova notação.  $\partial_i A_j$  depende de gauge,  $\partial_i A_j \rightarrow \partial_i A_j + \partial_i \partial_j \Psi$ , mas  $F_{ij}$  é invariante. Ele é parte do Tensor de Maxwell que possibilita formulação simples da eletrodinâmica.

---

<sup>†</sup>Alguns problemas de magnetostática, como o fio reto, o plano de correntes ou mesmo um cilindro com corrente fluido longitudinalmente, podem ser resolvidos simplesmente fazendo a transformação de Lorentz do caso eletrostático análogo.

As propriedades sob transformações de Lorentz são mais claras, já que ele é ( parte de) um tensor, enquanto  $\vec{B}$  não é um quadri-vetor e nem exatamente um tri-vetor, mas um pseudo-vetor<sup>‡</sup>.

*Provocação: Qual é a descrição lagrangeana da dinâmica da partícula que leva a essa força? Encontre as equações de Euler-Lagrange para o lagrangeano expresso como*

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + q \left( \vec{A}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} - \phi(\vec{r}) \right) = \frac{m}{2} \dot{x}_i \dot{x}_i + q (A_i(x) \dot{x}_i - \phi(x))$$

Obs: Atuando sobre partículas carregadas em movimento ( e coletâneas delas) o campo magnético não realiza trabalho.

Exemplos:

**1) Movimento ciclotrônico.** Campo magnético uniforme na direção z. Separe a velocidade da partícula como componentes no plano xy e em z separadamente.  $QV_{xy}B_z = mV_{xy}^2/R$  Significa movimento circular na projeção no plano xy. Componente  $x_3 = z$  em movimento uniforme.

**2) Cicloide.**  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  uniformes com  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ . Adotamos então  $B_i = B\delta_{i3}$ ,  $E_i = E\delta_{i1}$ .

$$F_i = Q(\delta_{i1} + \epsilon_{ijk}V_j\delta_{k3}) = Q(E\delta_{i1} + B\epsilon_{ij3}V_j)$$

Não há componente terceira da força,  $V_3$  é constante. As equações das componentes x e y são simplificadas escolhendo definir  $w \equiv QB/M$  e  $V \equiv E/B$  ( os nomes dessas constantes e das demais são motivadas por análise dimensional). Resulta

$$\ddot{x} = wv + w\dot{y}; \quad \text{e} \quad \ddot{y} = -w\dot{x}.$$

As equações acima ficam escritas como uma única, quando expressas em termos da variável complexa  $Z = x + iy$ ,

$$\ddot{Z} = w(V - i\dot{Z}).$$

O termo  $wV$  some com  $Z \rightarrow Z' = Z + iVt$ :

$$\ddot{Z}' = -iw\dot{Z}',$$

que tem solução imediata,  $\dot{Z}' = e^{-iwt}\dot{Z}_0$ . Escrevendo a constante complexa  $\dot{Z}_0 = -iwe^{i\phi_0}R$ , e integrando em relação ao tempo obtemos  $Z' = e^{-iwt+i\phi_0}R + Z_0$ , onde  $Z_0$  é a nova constante de integração. Expressando em termos de  $Z$ ,

$$Z = e^{-i(wt-\phi_0)}R + Z_0 - iVt.$$

Tomando as partes Real e imaginária, e escrevendo  $Z_0 = x_0 + iy_0$  resulta

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\phi_0 - wt) + x_0 \\ y &= R \sin(\phi_0 - wt) + y_0 - Vt \equiv R \sin(\phi_0 - wt) + y_0(t). \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

---

<sup>‡</sup>A consideração de que o campo magnético é um pseudo-vetor está implícita na construção dos campos a partir da simetria dos problemas quando solucionamos problemas com a lei de Ampere. Por exemplo, para um fio infinito no eixo z, o argumento de  $\vec{B}$  ser pseudo-vetor elimina a componente de B nas direção z

Agora ficou clara a interpretação: A partícula executa movimentos circulares de raio  $R$ , no sentido anti-horário, com velocidade angular  $w$  cujo centro, em  $(x_0, y_0(t))$ , se move ao longo de uma reta na direção  $y$ , com velocidade  $-V$ , passando por  $(x_0, y_0)$  no tempo inicial.

**Força sobre correntes** A partir da força de Lorentz se pode calcular qual é a força a que um circuito está sujeito sob a ação de um campo magnético, e também o torque. O seguinte dicionário é útil:

$$Q\vec{V} \leftrightarrow \vec{J}dV \leftrightarrow \vec{K}da \leftrightarrow \vec{I}d\vec{l} = I\vec{d}\vec{l}.$$

Assim

$$\vec{F} = \sum_i Q_i \vec{V}_i \times \vec{B}_i \equiv \int \vec{J} \times \vec{B} dV \equiv \int \vec{K} \times \vec{B} da \equiv I \int \vec{d}\vec{l} \times \vec{B}.$$

Exemplo 1) Um circuito retangular com um lado imerso num campo uniforme que vai a zero abruptamente. Fig 4.4.

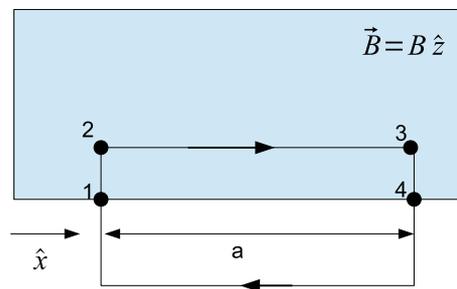


Figura 4.4: circuito retangular.

$$\vec{F} = I \oint \vec{d}\vec{l} \times \vec{B} = \int_1^2 \vec{d}\vec{l} \times \vec{B} + \int_2^3 \vec{d}\vec{l} \times \vec{B} + \int_3^4 \vec{d}\vec{l} \times \vec{B} = \int_2^3 \vec{d}\vec{l} \times \vec{B} = -IaB\hat{y}$$

Problema: Encontre a força no circuito retangular da figura 4.5. Faça, calculando na força bruta a integral em cada trecho e depois compare com o cálculo através da identidade válida para campos uniformes  $\int (\vec{d}\vec{l} \times \vec{B}) = (\int \vec{d}\vec{l}) \times \vec{B}$ . Qual seria a força se o circuito estivesse totalmente imerso na região de campo uniforme?

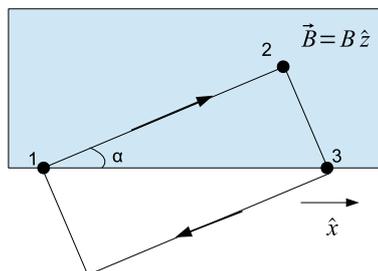


Figura 4.5: circuito retangular.

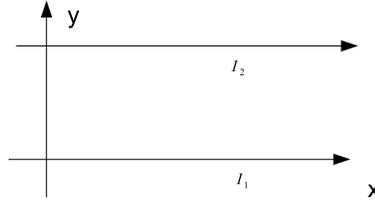


Figura 4.6: Força em fios paralelos.

Exemplo 2) Força, por unidade de comprimento, entre fios infinitos paralelos: Força exercida por (1) em (2):

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \hat{z} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad \text{portanto} \quad \vec{f}_2 = -\hat{y} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d},$$

sentido atrativo se  $I_1 I_2 > 0$ .

*Problema:* encontre a força que um fio exerce em um circuito retangular com dois lados paralelos ao fio. Considere o caso particular de circuito e fio coplanares e depois o caso mais geral. Encontre também o torque.

*Problema:* encontre a força por unidade de área que um plano de correntes exerce em outro. Considere as correntes e os planos paralelos.

Discussão: Terceira lei de Newton e circuitos.

### 4.5.1 Interpretação do Potencial Vetor

Vimos que o potencial escalar tem uma interpretação simples:  $q\delta\phi$  representa a variação da energia de uma partícula teste ao mover-se sob a ação do campo elétrico. Descrita em termos de variação, a interpretação física é invariante de gauge: não muda se uma constante for acrescentada ao campo escalar. A questão que discutiremos sucintamente agora é se existe interpretação análoga para o potencial vetor na magnetostática.

Considere inicialmente o caso do plano  $z = 0$  portando corrente superficial uniforme  $\vec{K} = K\hat{e}_x$ . Já vimos que o potencial pode ser escrito como  $\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 K}{2}|z|\hat{e}_x$  resultando em  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 K}{2}\frac{z}{|z|}\hat{e}_y$ . Considere agora que uma carga teste seja transportada desde um ponto  $\vec{r}_1$  até  $\vec{r}_2$  (com  $z_1 < z_2$ ), ambos no semi-espaco superior, ao longo de uma reta paralela o eixo  $z$  com velocidade constante. A força magnética exerce um impulso sobre a partícula que pode ser calculado como

$$\vec{I}_B = q\vec{v} \times \vec{B}\Delta t = \frac{qv\mu_0 K}{2}\hat{e}_x\Delta t = \frac{q\mu_0 K}{2}\hat{e}_x\Delta z = -q\Delta\vec{A}$$

. Esse resultado persiste mesmo se o movimento ocorre com velocidade variável, o que sugere a associação do potencial vetor com o impulso.

Essa interpretação pode ser testada em caso mais geral. Precisamos, porém, de uma expressão invariante de gauge, já que  $\vec{A}$  muda quando se faz uma transformação de gauge. Para generalizar a expressão, anterior, a escrevemos em componentes:

$$(I_B)_i = ? - q\Delta A_i = -q \int_1^2 (\vec{dl} \cdot \vec{\nabla}) A_i = -q \int_1^2 dx_j \partial_j A_i$$

A dificuldade é que  $\partial_j A_i$  não é invariante de gauge, e o lado esquerdo representa uma quantidade física, o impulso transmitido pela força magnética à partícula, não podendo variar quando se faz uma transformação de gauge. Observe porém que  $\partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{ijk} B_k$  é um invariante de gauge. Isso sugere que devemos testar a relação:

$$(I_B)_i = ? q \int_1^2 dx_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i).$$

Lembrando que  $dx_j = v_j dt$  vemos que, de fato,

$$\begin{aligned} q \int_1^2 dx_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) &= q \int_1^2 dt v_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = q \int_1^2 dt v_j \epsilon_{ijk} B_k = \\ &= \int_1^2 dt \epsilon_{ijk} q v_j B_k = \int dt (\vec{v} \times \vec{B})_i = \int dt F_{\text{Mag},i} \end{aligned}$$

Estabelecemos então que, no caso geral, o impulso se expressa como

$$I_{\text{Mag},i} = \int dt F_{\text{Mag},i} = q \int_1^2 dx_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i).$$

Nos casos em que a primeira parcela não contribui, como vimos acontecer quando do plano discutido acima, a variação de  $\vec{A}$  é, essencialmente, o impulso por unidade de carga.

## 4.6 Expansão em multipolos

A expansão em multipolos do campo magnético pode ser obtida repetindo o processo feito no caso da eletrostática. Novamente supomos a fonte (corrente nesse caso) confinada a uma região,  $r < R$  e o campo a ser calculado fora da região,  $r > R$

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{\Delta r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos(\theta)) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') + \frac{1}{r^2} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r}' \cdot \hat{r}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^3} \int dV' \vec{J}(\vec{r}') \left(-\frac{1}{8}\right) (3(\vec{r}' \cdot \hat{r})^2 - r'^2) + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.6.23)$$

$$= \left[ \vec{A}_{\text{monopolo}} + \vec{A}_{\text{dipolo}} + \vec{A}_{\text{quadrupolo}} + \dots \right] \quad (4.6.24)$$

Descritos dessa maneira a expressões não são muito fáceis de entender. Vamos reescrever cada termo.

1) Termo de monopolo. Aqui há uma grande diferença: O primeiro termo é nulo, ou seja, não há monopolo magnético.

$$\int J_i dV = \int J_j \delta_{ij} dV = \int J_j \partial_j x_i dV = \int [\partial_j (J_j x_i) - x_i (\partial_j J_j)] dV \quad (4.6.25)$$

$$= - \int_V [x_i (\partial_j J_j)] dV + \int_{\delta V} (J_j x_i) da_j = 0, \quad (4.6.26)$$

já que a corrente se conserva,  $\partial_j J_j = 0$ , e é localizada, portanto o termo obtido pelo teorema da divergência é nulo.

Do mesmo modo, usando o truque  $\delta_{ij} = \partial_i x_j$ , podemos reescrever o termo de dipolo repetindo o uso do teorema de divergência e da conservação da corrente,

$$\int dV x_k J_i = \int dV x_k J_j \partial_j x_i = \int dV (\partial_j (x_k J_j x_i) - x_i \partial_j (x_k J_j)) \quad (4.6.27)$$

$$= - \int dV x_i [(\partial_j x_k) J_j + (\partial_j J_j) x_k] = - \int dV x_i J_k. \quad (4.6.28)$$

Essa identidade pode ser interpretada de maneira simples: **após a integração em  $dV'$** , a expressão  $x'_i J_j(\vec{r}')$  se comporta como um símbolo antissimétrico nos índices  $ij$ . Traduzindo em símbolos:

$$x'_i J_j(\vec{r}') \approx -x'_j J_i(\vec{r}') \approx \frac{1}{2}(x'_i J_j(\vec{r}') - x'_j J_i(\vec{r}')),$$

onde  $\approx$  significa uma relação de equivalência após a integração. Conclusão importante sobre o termo de dipolo magnético:  $\vec{A}_{\text{dipolo}}$  é ortogonal a  $\vec{r}$ . De fato se quisermos calcular  $\vec{A}_{\text{dipolo}} \cdot \vec{r}$ , teremos de obter a integral em  $d^3 r'$  de  $r_i J_i(\vec{r}') r_j r'_j = (r_i r_j)(J_i r'_j)$ . Mas, o primeiro fator é simétrico, enquanto o último é antissimétrico sob integração ( após integrado). Como a soma em ambos os índices ( contração) de um símbolo simétrico com um antissimétrico é identicamente nula, resulta a ortogonalidade procurada. Por ser ortogonal a  $\vec{r}$ , deve ser possível então escrever o  $\vec{A}_{\text{dipolo}}$  como o produto vetorial de  $\vec{r}$  por outro termo. De fato, no cálculo do potencial vetor de dipolo, precisamos integrar  $J_i(\vec{r}') r'_j r_j$  em  $d^3 r'$ . Mas (  $\approx$  significa equivalentes sob integração):

$$(r'_j J_i) \approx \frac{1}{2}(r'_j J_i - r'_i J_j) = \frac{1}{2} r'_m J_n (\delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jn}) = \frac{1}{2} r'_m J_n \epsilon_{ijk} \epsilon_{nmk} = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\vec{r}' \times \vec{J})_k,$$

Portanto

$$r_j (r'_j J_i) \approx \frac{-1}{2} r_j \epsilon_{ijk} (\vec{r}' \times \vec{J})_k = \frac{1}{2} ((\vec{r}' \times \vec{J}) \times \vec{r})_i.$$

Resulta então

$$\vec{A}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \vec{m} \times \hat{r}, \quad (4.6.29)$$

com

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV' \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') \quad (4.6.30)$$

sendo chamado o momento de dipolo magnético. <sup>§</sup>

---

<sup>§</sup>Na verdade o argumento é bem geral. Dado um vetor qualquer,  $\vec{m}$ , com componentes  $m_i$  podemos associar a ele, sempre, um símbolo antissimétrico ( tensor)  $\tilde{m}$ , com componentes  $\tilde{m}_{ij} \equiv \epsilon_{ijk} m_k$ . Daí obtemos, pelo produto

O cálculo do rotacional deste potencial pode ser feito imediatamente usando novamente a regra para contração simples de duas  $\epsilon$ 's resultando em

$$\vec{B}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3} \right).$$

Mutatis-mutantibus, é a mesma expressão encontrada na eletrostática. Compare! Será que falta alguma coisa? De fato, por razões análogas a expressão deve ser corrigida (veremos isso mais tarde):

$$\vec{B}_{\text{dipolo}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3\hat{r}(\hat{r}\cdot\vec{m}) - \vec{m}}{r^3} + \frac{8\pi\vec{m}}{3}\delta(\vec{r}) \right).$$

O momento de dipolo magnético de um circuito fechado ( $\vec{J}dV' \rightarrow Id\vec{l}'$ ) tem uma interpretação simples

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r} = I\vec{S}.$$

Aqui  $\vec{S}$  tem uma interpretação geométrica: é a **área vetorial** da superfície que tem  $C$  como borda. No caso de circuito planar a área vetorial tem por módulo a área da superfície interior ao circuito, e aponta na direção normal, com sentido dado pela regra da mão direita. Como não há monopolo magnético, esperamos que o momento de dipolo não dependa da origem. Lembra-se do argumento análogo na eletrostática? De fato, uma mudança de origem muda  $\vec{r}$  por um vetor constante,  $\vec{D}$ , e  $\oint \vec{D} \times d\vec{r} = \vec{D} \times \oint d\vec{r} = 0$ .

*Problema: demonstre que o momento de dipolo não depende da origem no caso geral de uma densidade de correntes volumétrica.*

Do mesmo modo que no caso elétrico, podemos falar de um dipolo pontual, basta tomar a área do circuito indo a zero ao mesmo tempo em que o seu produto pela corrente é constante.

*Problema: Para uma carga pontual o momento de dipolo magnético é  $q\vec{r} \times \vec{V}$ . Mostre que para uma coletânea de cargas pontuais com a mesma relação carga massa se encontra  $\vec{m} \propto \vec{L}$ , onde  $\vec{L}$  é o momento angular do sistema de cargas, e encontre a constante de proporcionalidade.*

*Problema: Uma corrente  $I$  flui ao longo das arestas de um dos triedros de um paralelepípedo, Fig. 4.7. Encontre o momento de dipolo magnético e descreva o campo magnético longe do paralelepípedo.*

A noção de momento de dipolo é extremamente importante. Do ponto de vista prático, para descrever o campo magnético encontrado em diversos tipos de materiais, entender a relação entre

---

de duas  $\epsilon$ 's,  $m_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij}\tilde{m}_{ij}$ . Assim, usar  $\vec{m}$  ou  $\tilde{m}$  é completamente equivalente. No caso do momento de dipolo magnético, a definição mais direta à qual chegamos foi dada na realidade por

$$\tilde{m}_{ij} = \frac{1}{2} \int dV' (x'_i J_j - x'_j J_i),$$

e não diretamente por 4.6.30, de tal forma que

$$A_i \text{ dipolo} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} r_j \tilde{m}_{ji},$$

que é equivalente a 4.6.29. O vetor momento de dipolo,  $\vec{m}$  é então derivado, a partir dessa definição usando  $m_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\tilde{m}_{jk}$ . Mais uma observação: a correspondência mais precisamente é **pseudo-vetor**  $\leftrightarrow$  **tensor** e **vetor**  $\leftrightarrow$  **pseudo-tensor**.

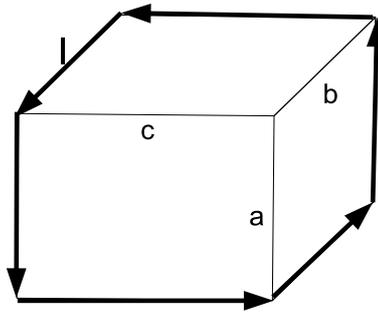


Figura 4.7: Circuito não plano

o campo aplicado e os dipolos magnéticos induzidos é essencial. De um ponto de vista da descrição das partículas elementares, se observa que o elétron apresenta um momento de dipolo magnético intrínseco, associado ao spin. Apesar de ser útil visualizar o spin, que é momento angular, e o seu momento de dipolo magnético associado, como devidos à rotação do elétron em torno de si mesmo, ao final de tudo temos que o spin é uma nova variável dinâmica, que tem uma descrição fundamentalmente quântica. Meu ponto de vista é esse: o campo magnético tem origem em movimentos de cargas  $e$  e em spin's.